

فصل ۳

مفاهیم و معادلات اصلی جریان سیال

تعاریف جریان

Laminar flow

جریان آرام: در این جریان، ذرات سیال سیرهای منظم و موازی را طی می کنند و هلاک سیال به آرامی به روى لایه مجاور می رسند. جریان آرام از قانون لزجت نیوتن و یا تعمیم آن به سه بعد یعنی قانون لزجت استوکس پیروی می کند. در این نوع جریان، هرگز نه گراش به آشفتگی توسط لزجت سیال مداخله می شود. در وضعیت هایی که لزجت سیال کم، سرعت جریان زیاد و محاسبات جریان بزرگ باشد، این جریان با پدیده ایست و به وضعیت آشفتگی تبدیل می شود.

مثالی از جریان آرام: جریان آب با سرعت پایین در کارهای تزئینی

جریان آشفتگی (درهم): در این جریان ذرات سیال سیرهای بی نامنظمی را طی می کنند. اندازه ذرات سیال

Turbulent Flow

از بسیار کوچک (چند هزارم mm در لایه مرزی) تا بسیار بزرگ (چند متر در گردبادها یا گرداب دریا) متغیر است. در جریان درهم تلفات با سرعت به توان $2 - 1.7$ متناسب هستند. برای اغلب کاربردهای مهندسی، جریان آشفتگی است.

مثالی از جریان آشفتگی: جریان آب در لوله های انتقال آب، جریان آب در رودخانه ها.

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}$$

برای جریان آشفته می توان رابطه زیر را نوشت

که η علاوه بر اینکه به خواص سیال وابسته است، به آشفتگی جریان و حجم مخصوص آن هم بستگی دارد.

$$\tau = (\mu + \eta) \frac{du}{dy}$$

در بسیاری از حالات عملی رابطه به شکل زیر است

$$\tau = 0, \mu = 0, K = \infty$$

سیال ایده آل : سیالی است بی اصطکاک و تراکم ناپذیر

لایه مرزی : لایه ای از سیال که در مجاورت مرز جامد قرار دارد، سرعت سیال در آن، متأثر از تنش برش مرز است.

Algebraic flow

جریان آریابائیک : جریانی که در آن به حواشی به سیال داده شود و نه از آن گرفته شود.

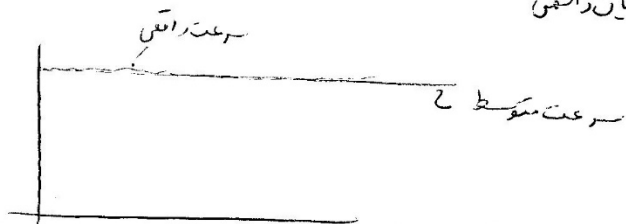
$$\vec{A} \cdot \vec{v}_A = 3 \frac{m}{s}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{v}_A = 3 \frac{m}{s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

در همین ترتیب
برای جریان دایمی



جریان غیر دایمی : جریانی است که شغفات سیال طی زمان تغییر نماید. دو تیربار آب در دهانه چمن با بزرگنمایی

جریان یکدخت : جریانی است که در آن در مقطع به هر سرعت به آن تمام نقاط فضایی باشد.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

تقسیمات مکان

رابطه می گوید که تقسیمات سرعت به مکان صورت می گیرد اما در مورد تقسیمات سرعت نسبت به زمان

چیزی نمی گوید

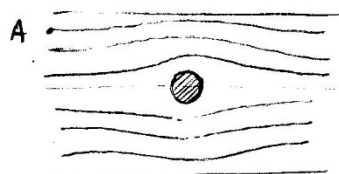
جریان غیر یکدخت : جریانی است که در آن بر دار سرعت از نقطه ای به نقطه دیگر در یک زمان تغییر کند.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

جریان غیر دایمی

بردارهای سرعت عبوری از هر نقطه می شود خط جریان (مماس به)

خط جریان : خط پیوسته ای است که امتداد آن در هر نقطه با امتداد بردار سرعت در آن نقطه یکسان باشد.



توضیح شکل : خطوط جریان برای جریان دایمی پیرامون

یک استوانه که بین دو دیواره موازی قرار دارد

خط سیر : خطی است که یک ذره از سیال روی آن حرکت می کند

در جریان دائمی در هر نقطه مقدار سرعت در طی زمان ثابت می ماند لذا مقدار خطوط جریان ثابت می ماند در نتیجه شکل خط جریان در فضا ثابت می ماند. مسیر حرکت ذره سیال همواره مماس بر خط جریان است بنابراین در جریان دائمی، خط مسیر هم خط جریان مطبق است.

با گذشت زمان

در جریان غیر دائمی چون در هر نقطه مقدار سرعت ممکن است در طی زمان تغییر نماید، خطوط جریان ممکن است از لحظه ای تا لحظه دیگر تغییر نمایند. در این صورت ذره ای که یک لحظه از یک خط جریان پیروی کند، در لحظه بعدی از خط جریان دیگری پیروی خواهد کرد و لذا مسیر ذره ممکن است هیچ شباهتی به خط جریان نداشته باشد. خط جوش به منظور ردیابی حرکت سیال، مرکب یا دود به داخل جریان تزریق می کنند در مرکب یا دود، خط نامیده می شود. در جریان دائمی، خط جوش، خط مسیر هم مطبق می کند.

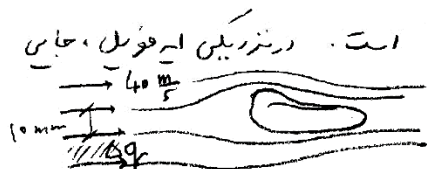
برای نمایش جریان آب تراکم ناپذیر دو لایه خطوط جریان را چنان رسم می کنند که در حجمی سیال عبوری از بین خطوط جریان مجاور یک ن باشد بنابراین در جایی که خطوط جریان به هم نزدیک ترند، سرعت بیشتر است. اگر در محلی فاصله دو خط جریان مجاور از هم h و سرعت متوسط بین آنها v باشد، در حجمی عبوری از بین

دو خط جریان به واحد عرض، Δq برابر است با $\Delta q = v \cdot h$

در نقطه دیگری که فاصله خطوط جریان h_1 است سرعت متوسط برابر $v_1 = \frac{\Delta q}{h_1}$ خواهد بود

مثال ۱-۳ خطوط جریان برای جریان دائمی پیرامون یک ایر فویل رسم شده است. در فاصله بسیار زیادی

از ایر فویل، سرعت جریان $40 \frac{m}{s}$ و فاصله دو خط جریان 10 mm است. در نزدیکی ایر فویل، جایی که فاصله دو خط جریان 7.5 mm است سرعت چقدر است؟



$$\Delta q = v \cdot h = 40 \frac{m}{s} \left(\frac{10}{1000} m \right) = 0.4 \frac{m^2}{s}$$

$$v_2 = \frac{\Delta q}{h_2} = \frac{0.4 \frac{m^2}{s}}{7.5 \times 10^{-3} m} = 53.3 \frac{m}{s}$$

سیتم و حجم کنترل

تمام جریان ها از قوانین زیر پیروی می کنند

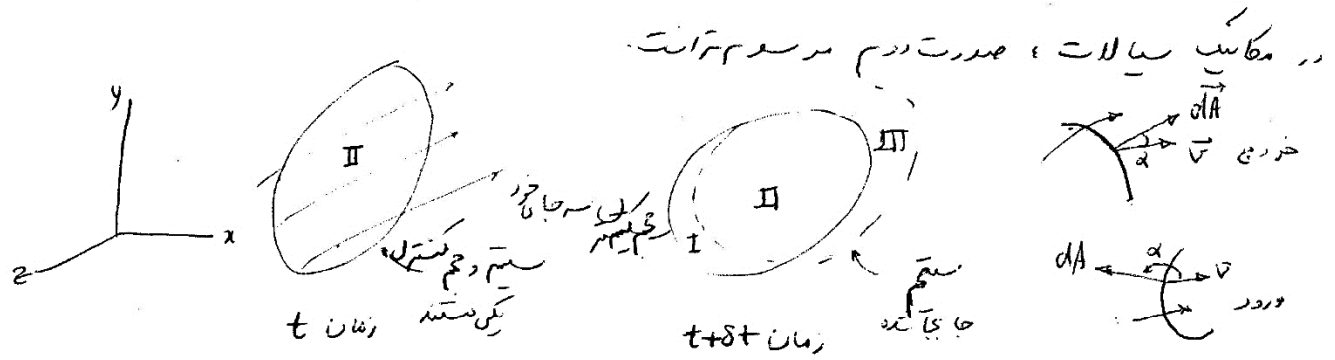
۱- قوانین حرکت نیوتن که باید برای هر ذره در هر لحظه صادق باشد

۲- معادله پیوستگی یا اصل بقای جرم ρ و μ در کتاب آمده

که همراه جریان حرکت کرده

قوانین اصلی را به دو صورت می توان بیان نمود: برای سیستم یعنی جرم معینی از ماده و برای حجم کنترل

یعنی حجم معینی در فضا



در مکانیک سیالات، صورت درج دوم ترانزیت

خاصیتی از سیال (مثلاً جرم m ، مستقیم m ، انرژی E و ...) را در نظر می‌گیریم و در حالت کلی آن را N نشان می‌دهیم. مقدار این خاصیت در واحد جرم سیال را با $\eta = \frac{N}{m}$ نشان می‌دهیم. نرخ افزایش N بازمان را برای سیستم می‌نویسیم پس آن را به η حجم کنترل فرمول بندی می‌کنیم.

$$\eta = \frac{N}{m} = \frac{N}{\rho V} \Rightarrow N = \eta \rho V \Rightarrow dN = \eta \rho dV$$

در رابطه بالا dV همان حجم را نشان می‌دهد و برای اینکه با سرعت اشتباه نشود، بر روی V خط کشیده شده است.

$$N_{sys, t+\delta t} - N_{sys, t} = (\int_{II} dN + \int_{III} dN)_{t+\delta t} - (\int_{II} dN)_t = (\int_{II} \eta \rho dV + \int_{III} \eta \rho dV)_{t+\delta t} - (\int_{II} \eta \rho dV)_t$$

حال، جمله $(\int_{II} \eta \rho dV)_{t+\delta t}$ را به سمت راست معادله اخیر اضافه و کم می‌کنیم و سپس، طرفین معادله را بر δt تقسیم می‌کنیم؛ داریم:

$$\frac{(N_{sys, t+\delta t} - N_{sys, t})}{\delta t} = \left[\frac{(\int_{II} \eta \rho dV + \int_{III} \eta \rho dV)_{t+\delta t} - (\int_{II} \eta \rho dV)_t}{\delta t} \right] + \left[\frac{(\int_{III} \eta \rho dV)_{t+\delta t}}{\delta t} \right] - \left[\frac{(\int_{I} \eta \rho dV)_{t+\delta t}}{\delta t} \right]$$

سپس، δt را به سمت صفر میل داده، از طرفین حد می‌گیریم. در حالت حدی، سمت چپ معادله میل می‌کند به:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{N_{sys, t+\delta t} - N_{sys, t}}{\delta t} \right) = \frac{dN}{dt}$$

در سمت راست، صورت کسر اول سه عبارت دارد؛ دو عبارت $(\int_{II} \eta \rho dV + \int_{III} \eta \rho dV)_{t+\delta t}$ مقدار N درون حجم کنترل در زمان $t + \delta t$ و

عبارت $(\int_{II} \eta \rho dV)_t$ مقدار N درون حجم کنترل در زمان t را نشان می‌دهد. در حالت حدی این کسر میل می‌کند به $\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho dV$

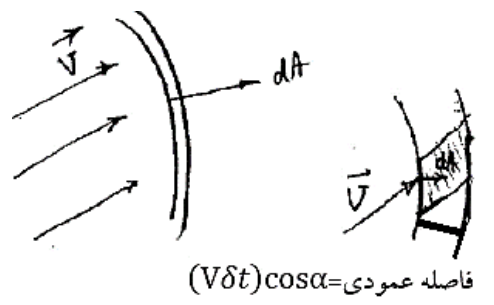
کسر دوم در سمت راست نشان دهنده نرخ خروج N از حجم کنترل در واحد زمان است؛ با توجه به شکل زیر، می‌توانیم dV (هاشور خورده در

شکل) را به صورت زیر بنویسیم:

$$dV = dA(V\delta t)\cos\alpha = \vec{V} \cdot \vec{dA}\delta t$$

که در آن، بردار سرعت را نشان می‌دهد، $\vec{dA}$ بردار سطح را نشان می‌دهد؛ جهت این بردار عمود بر سطح کنترل و به طرف خارج حجم کنترل است و α زاویه بین دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{dA}$ را نشان می‌دهد.

بنابراین برای کسر دوم در سمت راست داریم:



$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(\int_{III} \eta \rho dV)_{t+\delta t}}{\delta t} \right] = \int_{\text{سطح خروجی}} \eta \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} = \int_{\text{سطح خروجی}} \eta \rho V (\cos\alpha) dA$$

سومین عبارت سمت راست معرف نرخ ورود N به درون حجم کنترل است

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\int_V \eta \rho dV)_{t+\delta t} - (\int_V \eta \rho dV)_t}{\delta t} = - \int_{\text{سطح درونی}} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \int_V \eta \rho \vec{v} \cdot \vec{\omega} dA$$

نسبت است $\frac{dV}{dt}$ ، $\vec{v} \cdot d\vec{A}$: نسبت است

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{(\int_{CV} \eta \rho dV)_{t+\delta t}}{\delta t} - \frac{(\int_V \eta \rho dV)_{t+\delta t}}{\delta t} \right) = \int_{CV} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \eta \rho \vec{v} \cdot \vec{\omega} dA$$

این دیفرانسیل جریان را می‌توان نوشت

که حاصل ، نرخ خالص خروج N از حجم کنترل است

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho dV + \int_{CS} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

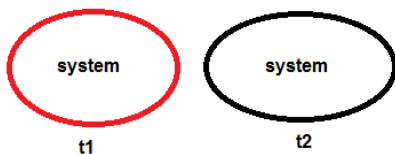
با جمع نمودن عبارت‌های مختلف داریم

معادله بدست آمده، با نام معادله انتقال رینولدز شناخته می‌شود و معنای عبارت‌های بکاررفته در آن چنین است:

$\frac{dN}{dt}$: نرخ افزایش N درون سیستم؛ $\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho dV$: نرخ افزایش N درون حجم کنترل؛ $\int_{CS} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$: نرخ خروج خالص N از سطح کنترل.

بدین ترتیب، معادله انتقال رینولدز بیان می‌کند که نرخ افزایش N درون سیستم برابر است با نرخ افزایش N درون حجم کنترل به علاوه نرخ خروج خالص N از سطح کنترل

معادله پیوستگی (اصل بقای جرم)



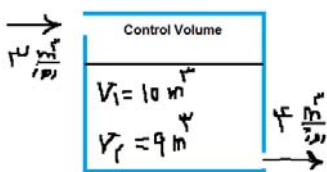
اگر در معادله انتقال رینولدز به جای N ، جرم m را قرار دهیم، معادله پیوستگی (اصل بقای جرم) بدست می‌آید. در

سمت چپ رابطه بدست آمده، $\frac{dm}{dt}$ را داریم؛ منظور از $\frac{dm}{dt}$ این است که یک سیستم را در نظر بگیریم، سپس تغییرات جرم را درون آن سیستم نسبت به زمان بدست آوریم. به دلیل تعریف سیستم (یعنی مقدار مشخصی ماده)، تغییر جرم

درون سیستم نسبت به زمان صفر است، یعنی: $\frac{dm}{dt} = 0$. در سمت راست رابطه، هر جا η داریم به جای آن ۱ قرار می‌دهیم، زیرا: $\eta = \frac{N}{m} = \frac{m}{m} = 1$ بنابراین:

$$0 = \frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{\text{سطح کنترل}} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

معادله بدست آمده معادله پیوستگی نام دارد و مطابق آن، نرخ افزایش جرم داخل حجم کنترل به علاوه نرخ خالص خروج جرم از حجم کنترل برابر صفر است.



مثالی ساده از معادله پیوستگی: یک مخزن آن را به عنوان حجم کنترل در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم حجم اولیه آب در مخزن

برابر 10 m^3 باشد، سپس در طول یک شبانه روز، 3 m^3 آب وارد مخزن شود و 4 m^3 آب از آن خارج شود. اگر

بخواهیم از معادله پیوستگی برای بیان این مسأله استفاده کنیم، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{\text{سطح کنترل}} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow (V_2 - V_1) + (Q_{out} - Q_{in}) = 0$$

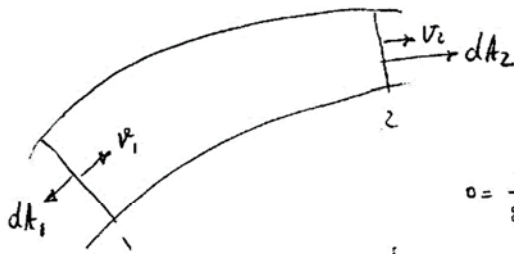
که در معادله اخیر، V_1 حجم آب درون مخزن در شروع زمان، V_2 حجم آب درون مخزن در پایان زمان، Q_{out} حجم آب خارج شده از مخزن در

طول یک شبانه روز و Q_{in} حجم آب وارد شده به مخزن در طول یک شبانه روز است. بدین ترتیب داریم:

$$(V_2 - 10 \text{ m}^3) + (4 \text{ m}^3 - 3 \text{ m}^3) = 0 \Rightarrow V_2 = 10 - 4 + 3 \Rightarrow V_2 = 9 \text{ m}^3$$

کار به معادله پیوستگی:

ابتدا جریان دانه‌ی در یک لوله جریان را در نظر می‌گیریم:



$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \int_{CS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$$

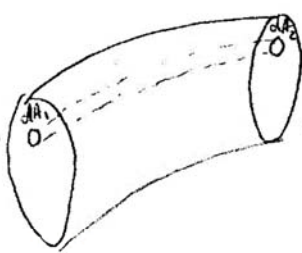
معادله جریان دانه‌ی

سطح کنترل، تشکیل شده از جدار لوله، سطح درونی جریان 1، سطح خارجی جریان 2

طبق معادله $\int_{CS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$ در یک بازه زمانی مقدار حجم خاص جریان از CS صاف است

$$\int_{\text{مقطع 2}} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \rho_2 v_2 dA_2, \quad \int_{\text{مقطع 1}} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) = -\rho_1 v_1 dA_1$$

$$\rho_2 v_2 dA_2 - \rho_1 v_1 dA_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 v_1 dA_1 = \rho_2 v_2 dA_2$$



برای یک دسته لوله جریان، اگر چگالی متوسط در مقطع 1 ρ_1 و چگالی متوسط

در مقطع 2 ρ_2 ، سرعت متوسط در مقطع 1 v_1 ، در مقطع 2 v_2 باشد

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

$$Q = AV, \quad v = \frac{1}{A} \int v dA$$

که سرعت متوسط با رابطه زیر تقریب می‌شود:

$$\dot{m} = \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 \quad \text{اگر جریان مورد نظر علاوه بر دانه‌ی بدون تراکم نابهره‌م باشد، معادله است}$$

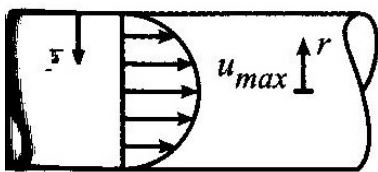
$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

معادله پیوستگی برای جریان تراکم‌ناپذیر (معمولاً) در صورت زیر است (جریان تراکم‌ناپذیر دانه‌ی یا فیلر دانه‌ی باشد)

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \int_{CS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$$

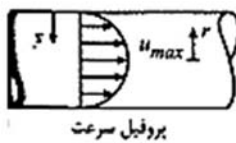
مثال: توزیع سرعت برای جریان آرام در یک لوله طویل با رابطه زیر داده شده است:

$$u = u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$



پروفیل سرعت

که در آن، R شعاع لوله، u_{max} مقدار سرعت در مرکز (محور) لوله و r فاصله هر نقطه دلخواه از محور لوله است. مطلوب است محاسبه دبی (حجمی) جریان و سرعت متوسط جریان در مقطع به صورت پارامتری.



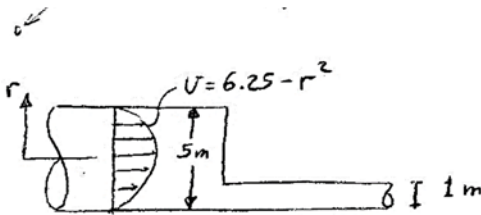
حل: جهت محاسبه دبی از رابطه (۹-۵) استفاده می‌کنیم.
برای این کار المان سطح dA را مطابق شکل به صورت یک حلقه به شعاع r و ضخامت dr در نظر گرفته و می‌نویسیم:

$$dA = 2\pi r dr$$

$$Q = \int_A u dA = \int_0^R \left[u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \times (2\pi r dr) = \frac{2\pi u_{max}}{R^2} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr$$

$$Q = \frac{2\pi u_{max}}{R^2} \times \left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right] = \frac{1}{2} u_{max} \pi R^2$$

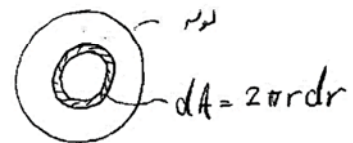
$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{1}{2} u_{max} \pi R^2}{\pi R^2} = \frac{1}{2} u_{max}$$



مثال: در شکل سرعت خردی جریان از لوله چقدر است؟

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_1 = \frac{1}{A_1} \int V dA$$



$$A_1 = \frac{\pi}{4} (5^2)$$

$$\int V dA = \int (6.25 - r^2) dA$$

$$V_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{4} (5^2)} \int_0^{2.5} (6.25 - r^2) 2\pi r dr = \frac{4}{\pi (5^2)} \int_0^{2.5} 6.25 r - r^3 dr$$

$$= \frac{8}{25} \left(\frac{6.25}{2} (2.5^2 - 0) - \frac{1}{4} (2.5^4 - 0) \right) \Rightarrow V_1 = 3.125 \frac{m}{s}$$

$$V_1 A_1 = \int V dA = \int_0^{2.5} (6.25 - r^2) 2\pi r dr = 2\pi \int_0^{2.5} 6.25 r - r^3 dr$$

$$= 2\pi \left\{ 6.25 \left(\frac{1}{2} \right) (2.5^2 - 0) - \frac{1}{4} (2.5^4 - 0) \right\} = 19.53 \pi \frac{m}{s}$$

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_2 = \frac{V_1 A_1}{A_2} = \frac{19.53 \pi}{\frac{\pi}{4} (1^2)} \Rightarrow V_2 = 78.125 \frac{m}{s}$$

مثال: آب با دبی $0.3 \frac{m^3}{s}$ به دستگاه وارد می‌شود. سطح مقطع ورودی از سه مجرای خردی $0.05 m^2$

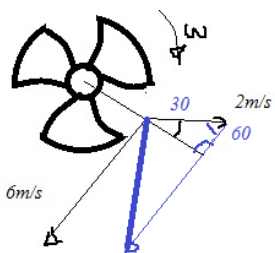
سرعت چرخش دستگاه $10 \frac{rad}{s}$ باشد. مطلوب است سرعت متوسط سیال خردی نسبت به زمین.

$$\frac{Q}{3} = \frac{0.3}{3} = 0.1 \frac{m^3}{s}, \quad Q = V \cdot A \Rightarrow V = \frac{Q}{A} = \frac{0.1}{0.05} = 2 m/s$$

سرعت جریان آب نسبت به زمین برابر است با سرعت جریان آب نسبت به پره به اضافه سرعت پره نسبت به زمین

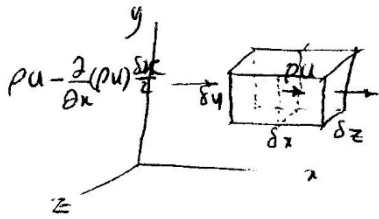
$$V_j = r\omega = 0.600(10) = 6 m/s$$

$$\vec{V}_j = \vec{V}_j + \vec{V}_p \Rightarrow V_j = \sqrt{2^2 + 6^2 - 2(2 \times 6)\cos(60^\circ)} = 5.29 m/s$$



عدم دیفرانسیل معادله پیوستگی

برای بیان معادله پیوستگی به دو دیفرانسیل داریم آن را برای یک حجم کنترل دیفرانسیل می نویسیم.



سرعت در مرکز حجم کنترل دیفرانسیل نشان داده شده دارای مؤلفه های u و w

$$\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2}$$

است و هم محضه سیال ρ است

$$\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s} \cdot m^2 \rightarrow \frac{kg}{s}$$

$$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \delta x \delta y \delta z$$

با انجام این عملیات برای جهت های x و y و z جمع می شود آنها را در جهت های x و y و z جمع می کنیم

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] \delta x \delta y \delta z = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$$

این یک معادله دیفرانسیل است و در جهت های x و y و z جمع می کنیم (درست می باشد) $\delta x \delta y \delta z$ را حذف می کنیم

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

این معادله کلی است و در حالت تراکم سیال $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ حذف می شود (درست می باشد)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

$$\vec{v} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \vec{u} = \vec{i} u + \vec{j} v + \vec{k} w$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

برای جریان دو بعدی، می توان دستگاه مختصات را طوری انتخاب کرد که جریان در راستای z مؤلفه نداشته باشد یعنی $w=0$ و بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

مثال مؤلفه های سرعت برای جریان تراکم ناپذیر دو بعدی با روابط زیر داده شده است، نشان دهید که این جریان در معادله پیوستگی صدق می کند.

$$u = - \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

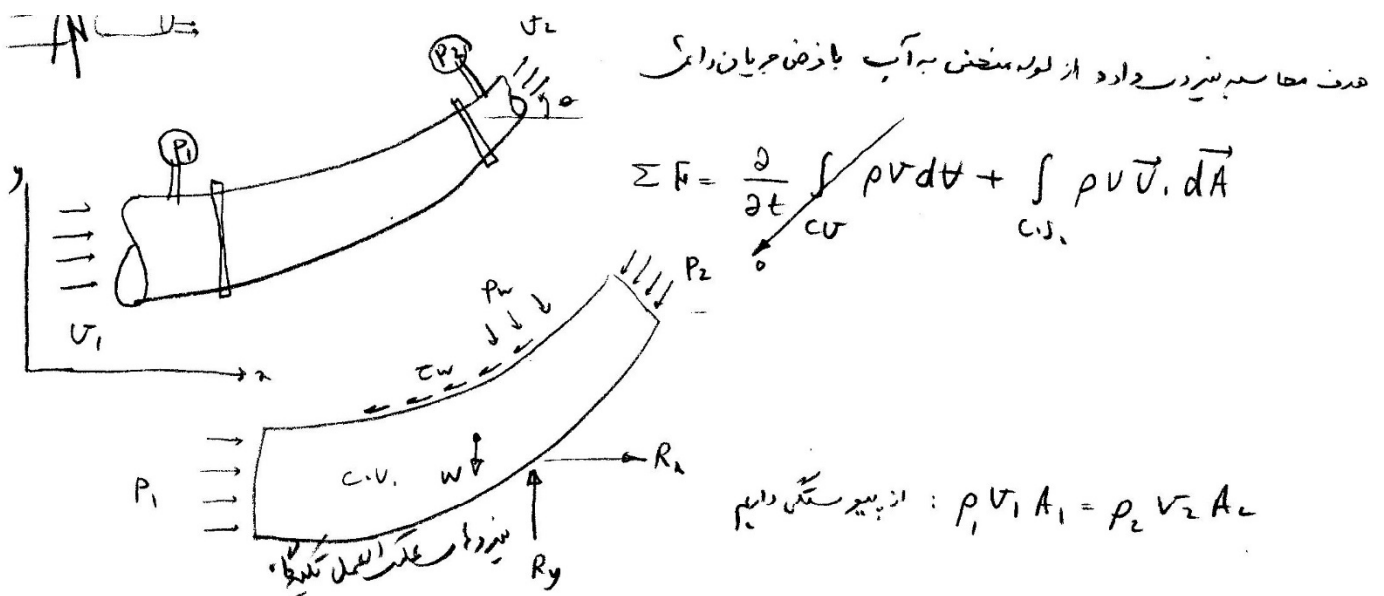
$$\sum F = ma, \quad \text{برای سیستم داریم} \quad \sum F = \frac{d(mV)}{dt}$$

اگر در معادله انتقال رینولدز به جای N قرار دهیم mV ، داریم: $\eta = \frac{(mV)}{m} = V$

$$\frac{d(mV)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho V dV + \int_{CS} \rho V \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

معادله بدست آمده، معادله اندازه حرکت برای سیستم است و مطابق آن، برآیند نیروهای وارد به حجم کنترل برابر است با نرخ افزایش اندازه حرکت داخل حجم کنترل به اضافه نرخ خروج خالص اندازه حرکت از حجم کنترل

مثال: برای شکل زیر، با فرض جریان یک بعدی و دائمی، مطلوب است محاسبه الف) نیروی وارد از لوله منحنی به جریان و ب) نیروی وارد از جریان به لوله منحنی



$$\begin{aligned} \sum F_x: P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \theta + R_x &= \int_{C.V.} \rho V_x \vec{V} \cdot d\vec{A} \\ &= \rho_2 (V_2 \cos \theta) (V_2 A_2) + \rho_1 (V_1) (-V_1 A_1) \\ &= \rho_1 V_1 A_1 (V_2 \cos \theta - V_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y: -P_2 A_2 \sin \theta - w + R_y &= \int_{C.S.} \rho V_y \vec{V} \cdot d\vec{A} \\ &= \rho_2 (V_2 \sin \theta) (V_2 A_2) + \rho_1 (0) (-V_1 A_1) \\ &= \rho_1 V_1 A_1 (V_2 \sin \theta) \end{aligned}$$

R_x و R_y نیروهای وارد از لوله منحنی به آب می‌باشد.

برای نیروهای وارد از آب به لوله منحنی: $-R_x$ و $-R_y$ را در نظر بگیریم.

$$K_x = -R_x = P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \theta - \rho_1 V_1 A_1 [V_2 \cos \theta - V_1]$$

$$K_y = -R_y = -P_2 A_2 \sin \theta - w - \rho_1 V_1 A_1 (V_2 \sin \theta)$$

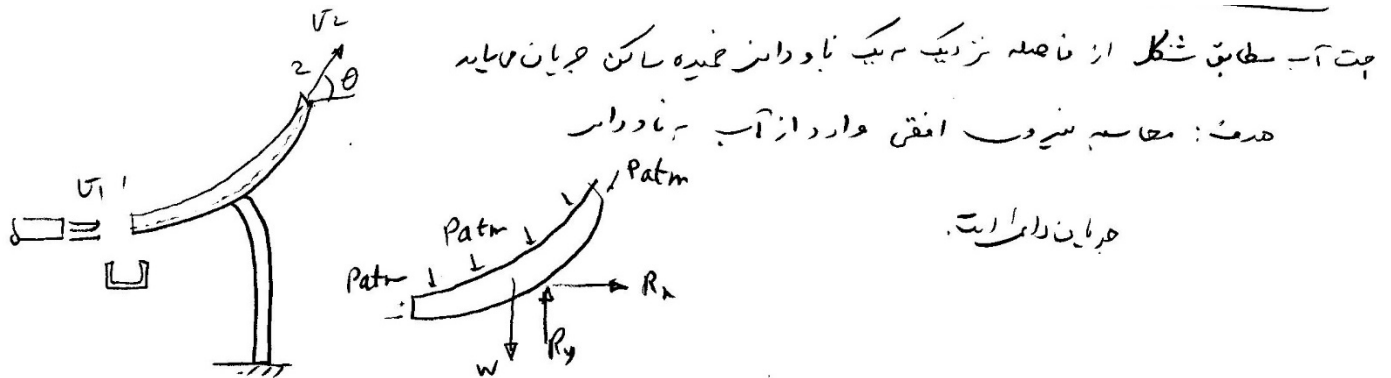
مثال عددی: در مثال قبل، با فرض اینکه سیال درون لوله آب با چگالی ثابت باشد؛ مقدار دبی $Q = 200 \frac{lit}{s}$ ، زاویه $\theta = 45^\circ$ ، قطر $D_1 = 50 \text{ cm}$ و $D_2 = 40 \text{ cm}$ ، وزن آب درون لوله $W = 1000 \text{ N}$ ، فشار $P_1 = 10 \text{ kPa}$ و $P_2 = 8 \text{ kPa}$ ، مطلوب است محاسبه K_x ، K_y ، R_x و R_y

$$K_x = 10000\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.5)^2 - 8000\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.4)^2 \cos(45^\circ) - 1000(0.2) \left[\frac{0.2}{\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.4)^2} \cos(45^\circ) - \frac{0.2}{\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.5)^2} \right] = 1231.2 \text{ N}$$

$$K_y = -8000\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.4)^2 \sin(45^\circ) - 1000 - 1000(0.2) \left[\frac{0.2}{\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.4)^2} \sin(45^\circ) \right] = -1936 \text{ N}$$

$$R_x = -K_x = -1231.2 \text{ N} , \quad R_y = -K_y = 1936 \text{ N}$$

مثال:



برای حل این مثال، مطابق شکل بالا یک حجم کنترل در نظر می گیریم و نیروی وارد بر آن را رسم می کنیم. R_x و R_y مؤلفه های نیروی وارد از ناودانی به جریان آب هستند و W نیروی وزن را نشان می دهد. فشار اتمسفر در تمام دور تا دور حجم کنترل وجود دارد و خودش را خنثی می کند. معادله اندازه حرکت را در جهت x می نویسیم:

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho v \, dV + \int_{CS} \rho v \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

با جایگذاری پارامترها داریم:

$$R_x = \rho(V_2 \cos \theta)(V_2 A_2) + \rho(V_1)(-V_1 A_1)$$

همین طور از معادله پیوستگی داریم:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

بنابراین داریم:

$$R_x = \rho V_1 A_1 (V_2 \cos \theta - V_1) \quad \text{نیروی وارد از ناودانی به آب:}$$

$$K_x = -R_x = -\rho V_1 A_1 (V_2 \cos \theta - V_1) \quad \text{نیروی وارد از آب به ناودانی:}$$